Riassunto. Vengono esposte diverse recenti caratterizzazioni della differenziabilita' della distanza da un insieme chiuso in uno spazio di Hilbert.

Abstract . We present several recent characterizations for the local differentiability of the distance function from a closed set in a Hilbert space.

PROPRIETA' DI REGOLARITA' DELLA DISTANZA DA UN INSIEME IN UNO SPAZIO DI HILBERT

ANGELO CAVALLUCCI

Sia $(X, < .,. >)$ uno spazio di Hilbert reale e C un sottoinsieme chiuso non vuoto. Cosideriamo la funzione distanza definita da

$$X \ni x \longrightarrow d_C(x) := \inf_{y \in C} \| x - y \|$$

e la multifunzione *proiezione metrica* su C definita da

$$X \ni x \longrightarrow \Pi_C(x) := \{y \in C | \ d_C(x) = \| x - y \|\}.$$

Se C e' anche convesso, e' ben noto che

$$\Pi_C(x) = \{\pi_C(x)\}, \forall x \in X,$$

ossia che $\Pi_C(x)$ e' costituito dal solo punto $\pi_C(x)$, che la funzione $\pi_C(\cdot)$ e' lipschitziana di modulo 1 su X, che esistono i gradienti

$$\nabla d_C^2(x) = 2[x - \pi_C(x)], \ \forall x \in X,$$

$$\nabla d_C(x) = \frac{x - \pi_C(x)}{d_C(x)}, \ \forall x \in X \setminus C$$

e che

$$< x' - x, \pi_C(x') - \pi_C(x) > \geq \| \pi_C(x') - \pi_C(x) \|^2$$

Qui ci proponiamo di esporre alcuni risultati sulla differenziabilita' locale della funzione $d_C(\cdot)$ per C non necessariamente convesso.

Dall'identita'

$$\| x - y \|^2 = \| x \|^2 - 2 < x, y > + \| y \|^2$$

segue

$$f(x) := \sup_{y \in C}[2 < x, y > - \| y \|^2] = \| x \|^2 - d_C^2(x)$$

e $f(\cdot)$ risulta essere convessa e localmente lipschitziana su X. Pertanto esistono i limiti, per ogni x e h,

$$f'(x; h) := \lim_{t \longrightarrow 0+} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} =$$

$$= 2 < x,h > - \lim_{t \longrightarrow 0+} \frac{d_C^2(x+th) - d_C^2(x)}{t}$$

e per $x \notin C$ si ha

$$f'(x;h) = 2 < x,h > -2d_C(x)d'_C(x;h).$$

Inoltre (cfr. [D],Theor.7.3) l'insieme

$$\{x \in X | \ \exists \nabla f(x), \ \limsup_{h \longrightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x) - < h, \nabla f(x) > |}{\| h \|^2} < \infty\}$$

e' denso in X.

Ne segue che $d_C^2(\cdot)$ e' Frechet-differenziabile su un sottoinsieme denso di X e che $d_C(\cdot)$ e' Frechet-differenziabile su un sottoinsieme denso di $X \setminus C$.

Se $dimX < \infty$, si ha

$$d'(x;h) = \min\{< h, \frac{x-c}{\| x-c \|} > | \ c \in \Pi_C(x)\}, \ c \notin C$$

(cfr. [C], [Z]) e quindi $d(\cdot)$ e' differenziabile in $x \notin C$ se solo se $\Pi_C(x)$ contiene un solo elemento.

Estensioni della formula precedente al caso di X qualsiasi si trovano, per esempio, in [BG],[Z].

Indichiamo con $B := \{x \in X | \ \| x \| \leq 1\}$ la sfera unita' di X e riportiamo alcune definizioni da [CLSW], [L].

$$N_C^P(x) := \{v \in X | \ \exists \delta > 0 : x \in \Pi_C(x + \delta v)\}, \ x \in C;$$

$$N_C(x) := \{v = w - \lim_{n \longrightarrow \infty} v_n | \ v_n \in N_C^P(x_n), C \ni x_n \longrightarrow x\}, \ x \in C,$$

ove "w-lim" significa convergenza debole;

$$T_C(x) := \{v = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{x_n - x}{t_n} | \ 0 < t_n \longrightarrow 0, C \ni x_n \longrightarrow x\}, \ x \in C;$$

$$T_C^w(x) := \{v = w - \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{x_n - x}{t_n} | \ 0 < t_n \longrightarrow 0, C \ni x_n \longrightarrow x\}, \ x \in C;$$

$$T_C^c(x) := \{v \in X | \ \limsup_{x' \longrightarrow x} \frac{d_C(x' + tv) - d_C(x')}{t} \leq 0\}, \ x \in C.$$

Osserviamo che per $x \in C$ sono equivalenti le affermazioni

$$x \in \Pi_C(x + \delta v),$$

$$d_C(x + \delta v) = \delta \| v \|,$$

$$< x' - x, v > \leq \frac{1}{2\delta} \| x' - x \|^2, \ \forall x' \in C$$

e ricordiamo che

$$v \in T_C^c(x) \Leftrightarrow < v, h > \leq 0, \ \forall h \in N_C(x) > .$$

Per

$$f : X \longrightarrow] - \infty, +\infty]$$

poniamo

$$\partial_P f(x) := \{v \in X | \liminf_{x' \longrightarrow x} \frac{f(x') - f(x) - < v, x' - x >}{\| x' - x \|^2} > -\infty\},$$

$$\partial f(x) := \{v = w - \lim_{n \longrightarrow \infty} v_n | \ v_n \in \partial_P f(x_n), (x_n, f(x_n)) \longrightarrow (x, f(x))\},$$

$$\partial_F f(x) := \{v \in X | \liminf_{x' \longrightarrow x} \frac{f(x') - f(x) - < v, x' - x >}{\| x' - x \|} \geq 0\}.$$

Tutti gli oggetti definiti sopra sono ampiamente studiati in [CLSW] e [L]. Poniamo anche

$$U_C(r) := \{x \in X | \ 0 < d_C(x) < r\}, \ r > 0.$$

Esponiamo ora alcune proprieta' della funzione distanza $d_C(\cdot)$.

Teorema 1. *Supponiamo $\Pi_C(x) \neq \emptyset$ e che esista il differenziale di Gateaux $\nabla d_C(x)$. Allora si ha*

i) $x \in C \Leftrightarrow \nabla d_C(x) = 0$;

ii) $\nabla d_C(x) \neq 0 \Rightarrow x \notin C, \ \Pi_C(x) = \{\pi_C(x)\}$,

$$\nabla d_C(x) = \frac{x - \pi_C(x)}{d_C(x)} = \frac{x - \pi_C(x)}{\| x - \pi_C(x) \|}.$$

Per la dimostrazione rimandiamo a [CLSW], Prop.2.8.4.

Teorema 2. *Supponiamo $v \in \partial_P d_C(x), \ x \notin C$. Allora si ha*

i) $\Pi_C(x) = \{\pi_C(x)\}$;

ii) $d_C(\cdot)$ *e' Frechet-differenziabile in x e riesce*

$$v = \nabla d_C(x) = \frac{x - \pi_C(x)}{\| x - \pi_C(x) \|}, \quad \partial_P d_S(x) = \{\nabla d_C(x)\};$$

iii) $v \in N_C^P(\pi_C(x))$;

iv) $x_n \longrightarrow x, \ v_n \in \partial_P d_C(x_n) \Rightarrow \pi_C(x_n) \longrightarrow \pi_C(x), \ v_n \longrightarrow v.$

Per la dimostrazione si veda [CLSW], Theor.2.6.1 e anche [CLW], Theor.4.1.

Teorema 3. *Sia* $x \notin C$, $\bar{c} \in \Pi_C(x)$. *Allora si ha*

$$0 < t < 1 \Rightarrow \partial d_C(\bar{c} + t(x - \bar{c})) = \{\frac{x - \bar{c}}{\| x - \bar{c} \|}\}, \ \nabla d_C(\bar{c} + t(x - \bar{c})) = \frac{x - \bar{c}}{\| x - \bar{c} \|}.$$

Per la dimostrazione rimandiamo a [CR], Prop.2.1. In [CR] e' anche provato che gli insiemi

$$\{x \notin C | \ \partial d_C x) \neq \emptyset\},$$

$$\{x \notin C | \ \Pi_C(x) \neq \emptyset\}$$

sono densi in $X \setminus C$.

Teorema 4. *Supponiamo* $v \in \partial_F d_C(x)$, $x \notin C$. *Allora si ha*

i) $\Pi_C(x) = \{\pi_C(x)\}$;

ii) $d_C(\cdot)$ *e' Frechet-differenziabile in* x *e riesce*

$$v = \nabla d_C(x) = \frac{x - \pi_C(x)}{\| x - \pi_C(x) \|}, \quad \partial_F d_S(x) = \{\nabla d_C(x)\};$$

iii) $v \in N_C^P(\pi_C(x))$;

iv) $x_n \longrightarrow x$, $v_n \in \partial_F d_C(x_n) \Rightarrow \pi_C(x_n) \longrightarrow \pi_C(x)$, $v_n \longrightarrow v$.

Per la dimostrazione rimandiamo a [BG], Lemma 6.

Teorema 5. *Sia* $x \notin C$, $\bar{c} \in \Pi_C(x)$. *Allora sono equivalenti le affermazioni*

i) $d'_C(x; \bar{c} - x) = -d'_C(x; x - \bar{c})$;

ii) $d'_C(x; h) = < h, \frac{x-\bar{c}}{\|x-\bar{c}\|} >$, $\forall h \in X$.

Per la dimostrazione rimandiamo a [BFG].

Per l'insieme

$$C := \{(x_1, x_2) \in R^2 | \ x_2 \geq x_1^6 - 1 + (1 - x_1^2)^{\frac{1}{2}}\}, \ -1 \leq x_1 \leq 1,$$

si ha (cfr. [CSW], Remark 4.13)

$$\Pi_C(0, -t) = \{(0, 0)\} \Leftrightarrow 0 < t \leq 1,$$

$$\nabla d_C(0, -1) = (0, 1)$$

$$\partial d_C(0, -1) = \emptyset.$$

Passiamo ora ad esporre il risultato principale di [PRT] sulla differenziabilita' locale della funzione distanza $d_C(\cdot)$.

Teorema 6. *Sia $\bar{x} \in C$, chiuso in X. Sono equivalenti le seguenti affermazioni, ove O indica un opportuno intorno aperto di $\bar{x}$ che puo' variare di volta in volta,*

i) $d_C(\cdot) \in C^1(O \setminus C)$;

ii) $d_C(\cdot)$ *e' Frechet-differenziabile su* $O \setminus C$;

iii) $d_C(\cdot)$ *e' Gateaux-differenziabile su* $O \setminus C$ *e* $\Pi_C(x) \neq \emptyset$ *per ogni* $x \in O$;

iv) $d_C^2(\cdot)$ *e' Frechet-differenziabile su* O *e* $\nabla d_C^2(\cdot)$ *e' lipschitziano su* O;

v) esiste $r > 0$, *dipendente da* O, *tale che*

$$x \in C \cap O,\ v \in N_C^P(x) \Rightarrow < v, x' - x > \leq \frac{\| v \|}{2r} \| x' - x \|^2,\ \forall x' \in C,$$

ossia, per $v \neq 0$, $x \in \Pi_C(x + r\frac{v}{\|v\|})$;

vi) esistono $\epsilon > 0, \rho > 0$ *tali che*

$$x \in C,\ \| x - \bar{x} \| < \epsilon, v \in N_C(x) \Rightarrow < v, x' - x > \leq \frac{\rho \| v \|}{2\epsilon} \| x' - x \|^2,$$

per ogni $x' \in C$ *con* $\| x' - x \| \leq \epsilon$;

vii) esistono $r > 0$, $\sigma > 0$ *tali che*

$$x_i \in C \cap O,\ v_i \in N_C(x_i),\ \| v_i \| < r \Rightarrow < v_1 - v_2, x_1 - x_2 > \geq -\sigma \| x_1 - x_2 \|^2;$$

viii) $\Pi_C(x) = \{\pi_C(x)\}$ *per ogni* $x \in O$ *e* $\pi_C(\cdot)$ *e'* $\| \cdot \| - w$ *continua su* O;

ix) $\Pi_C(x) = \{\pi_C(x)\}$ *per ogni* $x \in O$ *e inoltre esiste* $\alpha > 0$ *tale che*

$$x_i \in O \Rightarrow < x_1 - x_2, \pi_C(x_1) - \pi_C(x_2) > \geq \alpha \| \pi_C(x_1) - \pi_C(x_2) \|^2;$$

x) esiste $r > 0$, *dipendente da* O, *tale che*

$$x \in C \cap O \Rightarrow d_{T_C(x)}(x' - x) \leq \frac{1}{2r} \| x' - x \|^2,\ \forall x' \in C;$$

xi) se O *e' anche convesso, esiste* $\sigma > 0$ *tale che la funzione*

$$O \ni \longrightarrow d_C^2(x) + \sigma \| x \|^2$$

e' convessa;

xii) $\partial_P d_C(x) \neq \emptyset$ *per ogni* $x \in O$;

xiii) $\partial_F d_C(x) \neq \emptyset$ *per ogni* $x \in O$;

xiv) se C *e' debolmente chiuso in* O, *e' equivalente alle precedenti condizioni anche la seguente*

$$\Pi_C(x) = \{\pi_C(x)\},\ \forall x \in O.$$

Corollario. *Se per $\bar{x} \in C$ valgono le condizioni equivalenti i)-xiii), esiste un intorno aperto O di $\bar{x}$ tale che*

i) $\Pi_C(x) = \{\pi_C(x)\}$ *per ogni* $x \in O$ *e* $\pi_C(\cdot)$ *e' lipschitziana su* O;

ii) $d_C(\cdot)$ *e' Frechet-differenziabile su* $O \setminus C$ *e*

$$\nabla d_C(x) = \frac{x - \pi_C(x)}{d_C(x)}, \ \forall x \in X \setminus C;$$

iii) $N_C^P(x) = N_C(x) =$ *convesso chiuso,* $\forall x \in C \cap O$;

iv) $T_C^c(x) = T_C(x) = T_C^w(x) =$ *convesso chiuso,* $\forall x \in C \cap O$.

Le dimostrazioni del Teorema 6 e del Corollario sono contenute in [PRT]. Tale lavoro e' stato motivato dal lavoro precedente [CSW] dedicato allo studio della differenziabilita' della distanza $d_C(\cdot)$ nella striscia $U_C(r)$ di ampiezza costante $r > 0$.

Teorema 7. *Sia* $r > 0$ *e sia* C *chiuso in* X. *Sono equivalenti le seguenti affermazioni*

i) $d_C(\cdot) \in C^1(U_C(r))$;

ii) $d_C(\cdot)$ *e' Frechet-differenziabile su* $U_C(r)$;

iii) $d_C(\cdot)$ *e' Gateaux-differenziabile su* $U_C(r)$ *e* $\Pi_C(x) \neq \emptyset$ *per ogni* $x \in U_C(r)$;

iv) $d_C^2(\cdot)$ *e' Frechet-differenziabile su* $U_C(r)$ *e* $\nabla d_C^2(\cdot)$ *e' localmente lipschitziano su* $U_C(r)$;

v) si ha

$$x \in C, \ v \in N_C^P(x) \Rightarrow < v, x' - x > \leq \frac{\| v \|}{2r} \| x' - x \|^2, \ \forall x' \in C,$$

ossia, per $v \neq 0$, $x \in \Pi_C(x + r\frac{v}{\|v\|})$;

vi) si ha

$$x \in C, \ v \in N_C(x) \Rightarrow < v, x' - x > \leq \frac{\| v \|}{2r} \| x' - x \|^2, \ \forall x' \in C,$$

vii) si ha

$$x_i \in C, \ v_i \in N_C(x_i), \ \| v_i \| < r \Rightarrow < v_1 - v_2, x_1 - x_2 > \geq - \| x_1 - x_2 \|^2;$$

viii) si ha

$$u \in U_C(r), \ x \in \Pi_C(u) \Rightarrow x \in \Pi_C(x + r\frac{u - x}{\| u - x \|});$$

ix) $\Pi_C(x) = \{\pi_C(x)\}$ *per ogni* $x \in U_C(r)$ *e* $\pi_C(\cdot)$ *e'* $\| \cdot \| -w$ *continua su* $U_C(r)$;

x) si ha

$$x, x' \in C \Rightarrow d_{T_C(x)}(x' - x) \leq \frac{1}{2r} \| x' - x \|^2;$$

xi) esiste $\sigma > 0$ *tale che la funzione*

$$A \ni \longrightarrow d_C^2(x) + \sigma \| x \|^2$$

e' convessa su ogni convesso $A \subset U_C(r)$;

xii) $\partial_P d_C(x) \neq \emptyset$ *per ogni* $x \in U_C(r)$;

xiii) $\partial_F d_C(x) \neq \emptyset$ *per ogni* $x \in U_C(r)$;

xiv) se C e' debolmente chiuso , e' equivalente alle precedenti condizioni anche la seguente

$$\Pi_C(x) = \{\pi_C(x)\}, \ \forall x \in U_C(r).$$

Per la dimostrazione rimandiamo a [PRT] e anche a [CSW].

Corollario 1. *Se C verifica le condizioni equivalenti i)-xiii) con* $r > 0$, *allora riesce* $\Pi_C(x) = \{\pi_C(x)\}$ *per ogni* $x \in U_C(r)$ *e inoltre*

i) se $0 < r' < r$, *si ha*

$$x, x' \in U_C(r') \Rightarrow < x - x', \pi_C(x) - \pi_C(x') > \geq \frac{r - r'}{r} \| \pi_C(x) - \pi_C(x') \|^2,$$

$$\| \pi_C(x) - \pi_C(x') \| \leq \frac{r}{r - r'} \| x - x' \|;$$

ii) $d_C(\cdot)$ *e' Frechet-differenziabile su* $U_C(r)$ *e*

$$\nabla d_C(x) = \frac{x - \pi_C(x)}{d_C(x)}, \ \forall x \in U_C(r);$$

iii) per ogni $x \in C$ *si ha*

$$N_C^P(x) = N_C(x) = \text{ convesso chiuso,}$$

$$T_C^c(x) = T_C(x) = T_C^w(x) = \text{ convesso chiuso.}$$

Corollario 2. *Per C chiuso in X si ha*

i) C e' convesso se e solo se $\Pi_C(x) = \{\pi_C(x)\}$ *per ogni* $x \in X$ *e* $\pi_C(\cdot)$ *e'* $\| \cdot \| - w$ *continua su X;*

ii) se C e' debolmente chiuso, allora C e' convesso se e solo se $\Pi_C(x) = \{\pi_C(x)\}$ *per ogni* $x \in X$.

Per la dimostrazione rimandiamo a [PRT] oppure a [CSW].

Nel caso di $X = R^n$, molte delle condizioni equivalenti dei teoremi 6 e 7 sono contenute in [F].

Per l'insieme

$$C := \{(x_1, x_2) \in R^2 | \; x_2 \geq x_1^{\frac{3}{5}}\}$$

si ha $(1,0) \in N_C(0,0)$, ma $(0,0) \notin \Pi_C(r,0)$ per nessun $r > 0$ e quindi $(1,0) \notin N_C^P(0,0)$ e non valgono le condizioni del Teorema 6.

Un esempio significativo di insieme che verifica le condizioni del Teorema 6 e' dato dal seguente teorema.

Teorema 8. *Sia $\bar{x} \in C \cap O$, O aperto in X, sia D convesso chiuso nello spazio di Banach Y e sia*

$$F : O \longrightarrow Y$$

Frechet-differenziabile su O con differenziale $F'(\cdot)$ lipschitziano su O e tale che

$$C \cap O = \{x \in O | \; F(x) \in D\},$$

$$-F'(\bar{x})(X) + \bigcup_{t \geq 0} t(D - F(\bar{x})) = Y.$$

Allora per $\bar{x} \in C$ valgono le affermazioni del Teorema 6 e si ha inoltre

$$N_C(\bar{x}) = \{F'(\bar{x})^* y | \; y \in N_D(F(\bar{x}))\},$$

$$T_C(\bar{x}) = \{h \in X | \; F'(\bar{x})h \in T_D(F(\bar{x}))\}$$

Per la dimostrazione rimandiamo a [CELPT].

Per l'insieme

$$C := \{(x_1, x_2) \in R^2 | \; x_2 \leq |x_1|^\alpha\}, \; 1 < \alpha < 2,$$

si ha

$$(0,1) \in N_C(0,0), \; N_C^P(0,0) = \{(0,0)\}$$

e quindi non vale in (0,0) la condizione vi) del Teorema 6. Dunque non si puo' eliminare l'ipotesi di lipschitzianita' di $F'(\cdot)$ nel Teorema 8.

BIBLIOGRAFIA

[BFG] J. M. Borwein, S.P. Fitzpatrick, J. R. Giles, *The differentiability of real functions on normed linear spaces using generalized subgradients*, J.Math. Anal. **128** (1987), 512-34.

[BG] J. M. Borwein, J. R. Giles, *The proximal normal formula in Banach spaces*, Trans. A.M.S. **302** (1987), 371-81.

[C] F. H. Clarke, *Generalized gradients and applications*, Trans. A.M.S. **205** (1975), 247-62.

[CELPT] C. Combari,A. Elhilali Alaoui,A. Levy, R. A. Poliquin, L. Thibault, *Convex composite functions in Banach spaces and the primal-lower-nice property*, Proc. A.M.S. **126** (1998), 3701-08.

[CLW] F. H. Clarke, Yu. S. Ledyaev, P. R. Wolenski, *Proximal analysis and minimization principles*, J.Math. Anal. **196** (1995), 722-35.

[CLSW] F. H. Clarke, Yu. S. Ledyaev, R. S. Stern, P. R. Wolenski, *Nonsmooth Analysis and Control Theory*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[CR] F. H. Clarke, M. L. Radulescu, *Geometric approximation of proximal normals*, J.Convex Anal. **4, 2** (1997), 373-79.

[CSW] F. H. Clarke, R. S. Stern, P. R. Wolenski, *Proximal smoothness and the lower-C^2 property*, J.Convex Anal. **2** (1995), 117-44.

[D] R. Deville, *Smooth variational principles and non-smooth analysis in Banach spaces*, Nonlinear analysis, differential equations and control, F. H. Clarke, R. S. Stern (eds.) (1999), Kluwer Academic Publishers, the Nederlands.

[F] H. Federer, *Curvature measures*, Trans. A.M.S. **93** (1959), 418-91.

[L] P. D. Loewen, *Optimal control via nonsmooth analysis*, CRM Proc. Lecture Notes, vol. 2, American Mathematical Society, Providence, RI, 1993.

[PRT] R. A. Poliquin,R.T. Rockafellar, L. Thibault, *Local differentiability of distance functions*, Trans. A.M.S. **352, 11** (2000), 5231-49.

[Z] L. Zajicek, *Differentiability of the distance function and points of multivaluedness of the metric projection in Banach space*, Czechosl. Math. J. **33(108)** (1983), 292-308.